série n°12

Exercice N° 1

I/ Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{x} - x$

1/ Etudier les variations de f

2/ En déduire que $\forall x \in \text{IR} : f(x) \geq 1$

II/ Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{x}{e^{x} - x}$

On désigne par (ζ_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1/a) En utilisant I-2), montrer que g est définie sur IR

b) Calculer les limites de g au voisinage de $(+\infty)$ et de $(-\infty)$

c) Interpréter géométriquement les résultats obtenus

3/a) Montrer que g est dérivable sur IR et que $\forall x \in \text{IR} : g'(x) = \dfrac{e^{x}(1-x)}{(f(x))^2}$

b) Dresser le tableau de variation de g

4/a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (ζ_g) au point O (0 , 0)

b) Vérifier que $\forall x \in \text{IR} : g(x) - x = x(\dfrac{1}{f(x)} - 1)$

c) En utilisant I-2) déduire la position de (ζ_g) par rapport à (T)

5/ Tracer (T) et (ζ_g)

Exercice N°2

1/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = x + 2 - e^{x}$

a) Dresser le tableau de variation de g
b) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α et que : $1,1 < \alpha < 1,2$
c) En déduire le signe de g(x)

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{xe^{x} + 1}$

a) Montrer que : $\forall x \geq 0 \; f'(x) = \dfrac{e^{x} g(x)}{(xe^{x} + 1)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
d) Ecrire une équation de la demi tangente (T) à ζ_f au point d'abscisse 0.

3/ Tracer (T) et ζ_f courbe représentative de f dans un R .O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 4\text{cm}$

4 / Montrer que : $\forall x \geq 0 : f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ puis déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$

Exercice N°3

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=e^{-x^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f* et montrer qu'elle est paire.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat

3) Dresser le tableau de variation de *f* sur $[0,+\infty[$.

4) Tracer la courbe représentative (C*f*) de *f*.

5) Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser

   b) Explicité $g^{-1}(x)$ pour tout x de I

   c) Construire (ζ_{g^1})

Exercice N°4

Dans l'espace ξ, on considère trois points non alignés O,A et B et on désigne par G le point défini par $\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1/ Vérifier que $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

2/ Soit C un point de ξ n'appartenant pas au plan (OAB) et soit S l'ensemble des points M de ξ tels que $(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

a) Montrer que : $(M\in S)$ si et seulement si $(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MC}=\vec{0})$

b) En déduire la nature de S

3/ Dans toute la suite, on suppose que l'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On suppose aussi que les points A,B et C ont pour coordonnées respectives (6,0,0) ; (0,6,0) et (0,0,4)

a) Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés

b) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant $\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

c) vérifier q'une équation cartésienne de S est $x^2+y^2+z^2-2x-3y-4z=0$

d) Soit P le plan d'équation : z=0. Montrer que le plan P coupe S suivant le cercle de diamètre [OG]